هو

رساله فی حل مسائل الشیخ من الخلاصه و ایراد قواعد شریفه مهمه فی حلها اخذ سایر المسائل المشکله الحسابیه

بسم الله الرحمن الرحیم

منت بی عد واحصا افریدگار واحدی را سزد که بدوران
دارای عطا بخش خطاپوش وخداوند مهر چهر فرشته هوش
شاهنشاه عصر وخسرو دهر قهرمان عالم وخلاصه نقاوه بنی آدم
وارث اورنگ کیان حارس ممالک ایران ومروج قواعد
ملت وایمان پادشاه عقده بند کشور گشا سایه خداوند یکتا
السلطان بن السلطان بن السلطان ابو النصر والفتح
ناصر الدین شاه قاجار خلد الله سلطانه وادام الله
دولته پایه علوم بر فرق فرقدان رسیده وهر گونه دانش
وصنعتی درجه کمال گرفته کودکان دبستان از حسن تربیت
یافتگانش از دانایان سابق گوی سبق ربوده وجوانان
نوآموز از جهت حل کیفیتی از رموز بر دانشمندان سلف
برتری وتفوق جسته اشکال مشکله باقیه تا

کنون باندک توجه متعلمین مدرسه دار الفنون سهل و
منحل کردیده و ابکار افکار از چهره ضمیر بحجره تحریر
جلوه ظهور یافته و در صحایف و رسائل صورت
ثبات بلکه رسم طبع و انطباع پذیرفت که عامه طالبین
انشاء الله محظوظ و بهره یاب کردند فنحمده علی نعمائه و
نشکره علی آلائه و نصلی و نسلم علی النبی و آله و بعد
چون در روزنامه وقایع دولت علیه نواب مستطاب والا
تبار مهر سپهر مجد و اقتدار خورشید فلک فضل و افتخار شهزاده
آزاده اعتضاد السلطنه وزیر العلوم علیقلی میرزا دام اجلاله
العالی بجهة تشویق اهل دار الفنون تعریف و تحسین شاکردان
مدرسه مذکوره در مراتب علوم حساب و هندسه و غیرها
نموده بودند بعضی از مدعیان علوم از هر طرف بنای
مجادله کذاردند که کفته اند ه هر که کردن بدعوی فرازد
دشمن از هر طرف بر او تازد بعضی از آنقوم سؤال
از حل بعض مسائلی نمودند که در آخر کتاب خلاصة الحساب
قدوة المحققین و اسوة المدققین الشیخ بهاء الدین
العاملی اعلی الله مقامه ایراد یافته و دور نیست که

بعض دیگر سؤال از بعضی مسائل دیگر نمایند لهذا این بنده
عبد الغفار ابن الأستاد الفاضل والنحریر الکامل علی محمد آزاد صفهانی
در صدد تحقیق جواب این مسائل بر آمده عرض مینماید که عماد
الدین خوام بغدادی که یکی از علمای متقدمین در حساب و
هندسه است کتابی مبسوط در علم حساب هوائی نوشته
مسمی بفوائد البهائیه و در آخر آن کتاب سی و سه مسئله از
مسائل مشکله ایراد نموده و در ضمن آن بیان نموده که ما
نمیگوئیم که این مسئلها جواب ندارد بلکه میگوئیم که ما
نمیتوانیم این مسائل را جواب بگوئیم و اگر کسی از عهده حل
این مسائل برآید بدرستی که خدا تعالی عطا نموده است ما را
از علم و فهم چیزی را که بما عطا نفرموده است و چونکه خلاصه
جناب شیخ اعلی الله مقامه مختصری است از آن کتاب لهذا آن
مسائل را مختصر فرموده اکتفا بهفت مسئله نموده اند و جهت
آنکه عماد الدین خوام اعتراف نموده بعجز خود و سایرین
علمای آن عصر از حل آن مسائل آنستکه در حل این
مسائل محتاج میشوند بمعادلات چندی که غیر از مسائل
سته جبریه مشهوره است و بتصرفات غریبه که بدون

سفیر

منعقد مبین نرسیده چنانکه معلوم خواهد شد انشاء الله

وجمیع ان مسائل در این ایام از تاثیر اکسیر تربیت

بندکان اقدس شهریاری روح العالمین فداه منحل شده

جواب هر یک از انها واضح است بطریقی که مفصلا مذکور

میشود بواسطه انکه بحمد الله جمیع معادلات جبریه براین بنده

وسایر اهل دار الفنون سهل و اسان است از هر درجه

که باشد میتوانیم از عهده حل ان برائیم چه مسائلی که

بصد مرتبه از اینها مشکل تر بوده حل نموده ایم ومع

ذلک معترفیم بعجز و قصور خود وشاید مسئله یافت

شود که ما نیز عاجز باشیم از حل ان قال الله تبارک وتعالی

وَمَا اُوتِیتُم مِنَ العِلمِ اِلّا قَلِیلاً و بهمان قدر که متعلمین علم

هندسه و توپخانه در علم جبر و مقابله ترقی دارند

در سایر علوم ریاضی از قبیل حساب و هندسه و علم

مساحت و علم مثلثات ولوکاریتم و جغرافیا و مناظر

و مرایا نیز ترقی دارند بلکه هر متعلمی در علم منسوب باو

مانند فزیک خوانان واطبا وغیرهم بهمین مراتب در

علم خود ترقی کرده اند بواسطه انکه سرکار نواب اشرف

والا وزیر علوم که مدرسه مبارکه دار الفنون و متعلمین آن
که سپرده بایشان است خود در جمیع این علوم ماهر و با
بصیرتند و اهتمام ایشان در تربیت انها بی اندازه است که
لهذا نمیتوانند در تحصیل کوتاهی نمایند و از اینجهة است که
هر یک از انها در مدة یکماه بقدری که در دو سه ماه ترقی
نمیکردند ترقی نموده اند عبث مردم خود را در امتحان انها
زحمت میدهند ای مگس عرصه سیمرغ نه جولانگه تو است
عرض خود میبری و زحمت ما میداری باری چونکه صاحب
خلاصه هفت مسئله ایراد نموده بودند بر تحقیق جواب همان
هفت مسئله اکتفا میکنیم و ده قاعده که باصطلاح اهل اوروپا
فرمول میگویند از استنباطات خاطر خود که لازم میشود دانستن
انها در حل این مسائل و نظایر انها در این مختصر رساله درج
مینمائیم و ختم مینمائیم اخرا بایراد یک تساوی مشکلی
که از او بر بعیت و سه وجه حل نموده ام و بیان میکنم در
ضمن ان یک قاعده نادره اسان از استنباط خاطر خود
نیز که کفایت میکند در حل جمیع معادلات جبریه که مشتمل
باشند بر دو مجهول یان یاده که جواب انها بفوغ عدد اعداد

اوروپا

اردوپا خالی از صعوبت و اشکال نیست مخفی نماند که
که آنچه از کتب علمای حساب و جبر و مقابله ایران و مغرب
زمین بنظر رسیده جمیع عبارت را بصراحت بیان میکنند
جز صفر و اعداد را که باین علامات ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵
و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ بیان کرده اند اما اهل اروپا تصرف نموده
تسهیل در عمل کرده اند و اکثر مطالب را بنشان و علامات
بیان میکنند مثلا علامت جمع این است + و علامت
تفریق این است − و علامت جذر این است √ و علامت
مال کعب کعب کعب کعب این است کلـ[۱۷]
و هکذا و باین سبب بسیار مطالب بوجه مختصر و آسان
بیان می شود مثلا اهل ایران در زمان قدیم مینوشتند
ضلع اول از ۲۵۶ بنا برانکه مال کعب الکعب فرض
شود جمع شود با ضلع اول ۲۴۳ بنا برانکه
مال کعب فرض شود حاصل مساوی است به پنج
و اهل اروپا این مطلب را باین طور مینویسند

$$\sqrt[8]{۲۵۶} + \sqrt[5]{۲۴۳} = ۵$$

بنا بر این چون اختصار و تسهیل در عمل مطلوب نشد نقلبند

قدما لابد ما نیز محتاج شدیم بوضع علامات و چون اهل بلده

دار الفنون بکتب فرانسه مانوس اند بعلامات آنها اکتفا کرده ند

چه مقصود جز اختصار و تسهیل عمل چیز دیگر نیست و هر دو آنها بعلامات

که اهل فرانسه وضع نموده اند حاصل میشود علاوه بر این در بطوق

الملاوع که از کتب ایشان که بی فائده نیست نیز حاصل میکرد بخلاف

آنکه اصطلاح جدید و علامات تازه وضع میکردیم این فائده مفقود

بود و اگر کسی این علامات را نداند جرمی بر ما نیست و بحثی بر ما

وارد نمیاید بلی المرء عدو لما جهل اما بیم بر سر مقصود و بالله

التوفیق **المسئلة الاولی** عشرة مقسومة بقسمین اذا زید علی

کل جذره وضرب المجتمع فی المجتمع حصل عدد مفروض **جواب**

تحقیق نستکه بگوئیم مقصود سائل از تقسیم نمودن عشره بدو قسم

یا بدو قسم است که هر قسمی عدد صحیح باشد و آن منحصر است به پنج صورت

(۱ و ۹) (۲ و ۸) (۳ و ۷) (۴ و ۶) (۵ و ۵) و معلوم است که

جز صورت اولی یا هیچکدام از آن دو قسمت مجذور حقیقی نیستند

مانند ۳ و ۷ و ۲ و ۸ یا آنکه یک قسمت آن مجذور حقیقی است

قسمت دیگر آن اصم است مثل چهار و ۶ یا آنکه مقصود ش تقسیم

بلاد

بدو قسمت کیفما کان اعم از انکه هر دو قسمت صحیح مع الکسر باشد
یا یکی کسر فقط باشد و دیکری صحیح مع الکسر و علی ای نحو کان
اکر یک قسمت منطق باشد قسمت دیکر لا محاله اصم خواهد بود
باری اکر مقصود سائل ان باشد که باید تقسیم نمود عشره را
بدو قسمت صحیح منطق منحصر است جواب باینکه یک قسمت عشره
عدد یک باشد و قسمت دیکر عدد نه و قول سائل که کفته است
حصل عدد مفروض لا محاله ان عدد باید ۲۴ باشد و اکر بکوییم
که مقصودش تقسیم عشره است بدو قسمت صحیح اکرچه هر دو قسمت
یا یک قسمت عدد اصم باشد بر سائل لازم است که تعیین عدد
مفروض نماید مثلا بکوید حصل عشرون او حصل ثلثون او
حصل خمسون تا ما بیان کنیم که جواب مسئله چیست و یا انکه مسئله
مستحیل است زیرا که نتیجه این اعمال لا محاله اعداد مخصوصه
معینه است پس اکر همان اعداد را فرض کرده باشد سائل سؤال صحیح است
و الا سؤال غلط خواهد بود و اکر بکوییم که مقصودش تقسیم
نمودن عشره است بدو قسمت کیفما کان در این صورت عدد
مفروض زیاده از پنجاه و دو نمیتواند بود تقریبا زیرا که بزرکترین
حاصلی که پیدا میشود از این اعمال وقتی است که تقسیم نمایم عشره را

بد و قسمت متساوی نتیجه از ده یا ده از پنجاه و دو هشت تقریبا

و بر سائل لازم است که عدد مفروض را معین نماید و چون

سائل فرض این حد را ننموده ما سی و پنج فرض نمودیم و صورت

مسئله این خواهد شد عشرة مقسومة بقسمین کیفما کان

اذا زید علی کل جذره التقریبی او التحقیقی و ضرب المجتمع فی

المجتمع حصل خمسة وثلثون تقریبا جهة جواب این مسئله فرض

میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x^2 پس قسمت دیگر این میشود

$x^2 - 10$ و پس از آن این تساوی حاصل میشود *

* $(x^2+x)(10-x^2+\sqrt{10-x^2}) = 35$

و از آن $10x^2+10x-x^3-x^4+(x^2+x)\sqrt{10-x^2} = 35$

و پس از آن $\sqrt{10-x^2} = \dfrac{35-10x^2-10x+x^4+x^3}{x^2+x}$

و از اینجا $x^8+2x^7-19x^6-40x^5+150x^4+$

$+270x^3-900x^2-700x+1225 =$

$-x^6-2x^5+9x^4+20x^3+10x^2$

و از اینجا $x^8+2x^7-18x^6-38x^5+141x^4+$

$+250x^3-910x^2-700x+1225 = 0$

پس عمل منتهی شد بیک تساوی مخلوطی از درجه هشتم که شامل

هشت جواب را ولیکن جوابهائی که صدق میکند در این مسئله دو جواب است

$1,82119 =$ کعب

$8,17881 =$ کعب و چون عدد یکی از دو قسمت عشره فرض شده بود پس جواب اول یک قسمت اَنده و جواب دوم قسمت دیگر است یعنی باید ده را تقسیم نمود باین دو قسمت تا آنکه بعد از عمل حاصل مساوی ۳۵ شود و سبب عجز قدما از حل مسئله آنستکه منتهی میشود عمل باین معادله یک مال الکعب الکعب بعلاوه دو مال کعب بعلاوه ۱۰۱ مال المال بعلاوه ۲۵۰ کعب ۱۲۲۵ عدد مساوی میشود بر ۱۸ کعب الکعب بعلاوه ۸۳ مال الکعب ۱۰۱ مال بعلاوه ۷۰۰ شیء و بر هر محاسبی معلوم است که قدما عاجز بوده اند از حل اینگونه معادلات

المسئلة الثانیة مجذور ان زدنا علیه عشرة کان للمجتمع جذر او نقصنا ها منه کان للباقی جذر جواب هرگاه بگوئیم که مجذور ان بصیغه تثنیه خوانده میشود و ضمیر علیه را ابتدا و بلا باو راجع کنیم که حاصل معنی عبارت چنین شود که دو مجذور است که هرگاه زیاد کنیم بر مجموع انها ده عدد یا کم کنیم از مجموع انها ده عدد بوده باشد از برای مجتمع یا باقی جذر جواب میگوئیم که بنا بر این معنی دو واحد از اضلاع

ست

احتمال اول اینکه یکی از دو شرط زیاده و نقصان کافی باشد در تحقق و
صدق مسئله و احتمال ثانی انکه جمع بین الشرطین لازم باشد در تحقق
مسئله اما بنا بر احتمال اول و بنا بر فرض انکه مقصود شرط زیاد کردن
ده عدد باشد فرض میکنیم یکی از دو مجذور را x^2 و دیگری را
y^2 پس این تساوی حاصل است $x^2 + y^2 + 10 = z^2$ (۱)

فرض میکنیم $z - x - y = A.$

$z = A + x + y.$

و $z^2 = A^2 + x^2 + y^2 + 2Ax + 2Ay + 2xy.$

بعد از تفریق او از تساوی اول حاصل میشود $10 = A^2 + 2Ax + 2Ay + 2xy.$

$(2A + 2x)y = 10 - A^2 - Ax.$

$$y = \frac{10 - A^2 - 2Ax}{2A + 2x}.$$

در اینجا مقادیر نامعین فرض شده است A و x

پس حاصل میشود بجهه A و x و y و z این مقادیر

$A = \ldots\ldots,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots\ 2,\ 2,\ 4\ \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots\ \frac{5}{9},\ \ldots\ldots$

$z = \ldots\ldots\ \frac{23}{9},\ \ldots\ldots$

دنباله

وبنا بر فرض انکه مقصود شرط نقصان ده عدد باشد فرض میکنیم یکی از دو مجذور را x^2 ودیگری را y^2 پس این معادله

$$x^2 + y^2 - 10 = z^2$$ حاصل است

$$x + y - z = A.$$ فرض میکنیم

$$z = x + y - A.$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + A^2 - 2Ax - 2Ay + 2xy.$$

$$-10 = A^2 - 2Ax - 2Ay + 2xy.$$

$$(2A - 2x)y = A^2 - 2Ax + 10.$$

$$y = \frac{A^2 - 2Ax + 10}{2A - 2x}.$$

$$A = \ldots\ldots\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots$$

$$x = \ldots\ldots\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$$

$$y = \ldots\ldots\ 5,\ 3\frac{1}{2},\ \ldots\ldots$$

$$z = \ldots\ldots\ 4,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots\ldots$$

وهرگاه مسئله را بطور کلی ادا کنیم باین طریق می شود

$$x^2 + y^2 \pm a = z^2$$

$$y = \frac{a - 2Ax \mp A^2}{2A \pm 2x}$$ بعد از عمل کردن این فرمول حاصل میشود

اما بنا بر احتمال ثانی فرض میکنیم دو مجذور را یکی x^2

و دیگری y^2 پس این دو تساوی حاصل است

$$x^2 + y^2 + 10 = z^2$$

$$x^2 + y^2 - 10 = v^2$$

حال هرگاه عمل کنیم در تساوی اول بتنهائی حاصل میشود بجهة x و y دو سلسله مقادیر و هرگاه عمل کنیم در تساوی دوم بتنهائی حاصل میشود نیز بجهة x و y دو سلسله مقادیر دیگر جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر اول دو مقادیری بجهة x و y بطوریکه حاصل جمع مجذورشان مساوی شود بحاصل جمع دو مجذور x و y از دو سلسله مقادیر دوم پس بعد از یافتن دو مقدار حقیقی خواهند بود از x و y وجه دیگر فرض میکنیم این دو مجذور را یکی x^2 و دیگری y^2 پس این دو تساوی حاصل است

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 10 &= z^2 \\ x^2 + y^2 - 10 &= v^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

بعد از آنکه تفریق کنیم یکی از این دو تساوی را از دیگری این تساوی حاصل است

$$z^2 - v^2 = 20 \quad (2)$$

حال فرض میکنیم تفاضل این ریشهای این تساوی را مساوی به A پس

$$z - v = A, \quad z^2 = A^2 + v^2 + 2Av$$

و بعد از گذاردن مساوی z^2 را در تساوی (۲) $A^2 + 2Av = 20$

پس (۳) $v = \frac{20 - A^2}{2A}$ ، $z = \frac{20 + A^2}{2A}$

حال در این تساوی A مقدار ثابت نامعین پس بجهت z و v

جوابهای مالانهایه حاصل میشود ولیکن میتوانیم این

مقادیر را در تساوی (۱) بگذاریم زیرا که $y^2 + x$ از تساوی

اسقاط شده است پس بجهت اینکه مقدار A را معین نمائیم مساوی

z^2 را در تساوی (۱) بگذاریم پس حاصل میشود این تساوی

$$x^2 + y^2 + 10 = \left(\frac{20 + A^2}{2A}\right)^2 = \frac{400 + A^4 + 40A^2}{4A^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{400 + A^4 + 40A^2}{4A^2} - 10 = \frac{400 + A^4}{4A^2}$$

حال باین قسم عمل میکنیم (۴) $x^2 + y^2 = \frac{400 + A^4}{4A^2}$

فرض میکنیم $x - y = B$

و $x = B + y$

و $x^2 = B^2 + y^2 + 2By$

بعد از گذاردن مساوی x^2 را در تساوی (۴) حاصل می‌شود

$$2y^2 + B^2 + 2By = \frac{400 + A^4}{4A^2}$$

و $y^2 + By = \frac{400 + A^4}{8A^2} - \frac{B^2}{2} = \frac{400 + A^4 - 4A^2B^2}{8A^2}$

$$y = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{400 + A^4 - 4A^2B^2}{8A^2} + \frac{B^2}{4}} = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{800 + 2A^4 - 4A^2B^2}{16A^2}}$$

چون γ باید مقدار حقیقی باشد پس آنچه در تحت رادیکال واقع است باید مجذور حقیقی باشد و چون مخرج که $16A^2$ است مجذور است پس صورت کسر نیز باید مجذور حقیقی باشد پس فرض میکنیم او را مساوی q^2 و این تساوی حاصل است

$$800 + 2A^4 - 4A^2B^2 = q^2$$

و از این تساوی

$$B^2 = \frac{800 + 2A^4 - q^2}{4A^2}$$

و چون B^2 مجذور حقیقی است و مخرج کسر نیز مجذور حقیقی است پس صورت کسر نیز باید مجذور حقیقی باشد و فرض میکنیم او را مساوی p^2 پس این تساوی حاصل است $800 + 2A^4 - q^2 = p^2$

$$A^4 = \frac{q^2 + p^2 - 800}{2}$$

و

و از این تساوی

$$A = \sqrt[4]{\frac{q^2 + p^2 - 800}{2}}$$

پس مقدار A معین شد و p و q در این تساوی مقادیر نامحدود ماند ولیکن باید دو مقداری فرض نمود که بعد از تفریق نمودن ۸۰۰ را از حاصل جمع مجذورشان نصف باقی یک مال المال حقیقی باشد و بعد از آن میتوانیم تعیین p و q را نمائیم زیرا که بعد از عمل زیر رادیکال حاصل را در جدول مال المال جستجو میکنیم اگر یافت شد که ریشه او مساوی است با A فبها و اگر

یافت

یافت نشد مقادیر دیگر فرض میکنیم و باید دانست که p و
q را میتوانیم مقادیری فرض نمائیم که جمع مجذور ایشان کمتر از
۱۰۰ باشد زیرا که اگر کمتر باشد باقیمانده منفی خواهد بود
و عدد منفی ریشه چهارم ندارد مثلا یافتیم بجهة q ، p و
این دو مقدار را $p = ۲۴$ ، $q = ۱۶$
$q^۲ + p^۲ = ۸۳۲$ ، $A = \sqrt[۴]{\frac{۳۲}{۲}} = ۲$
و A را مکذاریم در تساوی (۳) پس بجهة v ، z
این دو مقدار حاصل میشود $v = ۴$ ، $z = ۶$
پس $x^۲ = ۱$ ، $y^۲ = ۲۵$ ، $z^۲ = ۳۶$ ، $v^۲ = ۱۶$
و هرگاه مجذور بصیغه مفرد خوانده شود عبارت با نصاحب دو
احتمال خواهد بود یکی آنکه مجذوری است که اگر ۱۰ بر آن افزوده
شود مجذور باشد یا آنکه ده از آن نقصان شود مجذور باشد و این
معنی ظاهر عبارت خلاصة است و دیگری آنکه مجذوری است که چون
ده بر آن افزوده شود و ده از آن نقصان شود در هر دو حالت
نیز مجذور باشد پس این مسئله نیز در حقیقت سه مسئله میباشد
اما بجهة فرض اول از احتمال اول فرض میکنیم آن مجذور را $x^۲$
پس این تساوی حاصل است (۱) $x^۲ + ۱۰ = z^۲$

فرض میکنیم

$$z - x = A$$

$$z = A + x$$

$$z^2 = A^2 + x^2 + 2Ax.$$

بعد از گذاشتن او در تساوی (۱) این تساوی حاصل است

$$A^2 + 2Ax = 10$$

پس

$$x = \frac{10 - A^2}{2A}.$$

A در این تساوی مقدار نامعین است پس بجهت x حاصل میشود این مقادیر

$$A = \ldots 1, 2, 3$$

$$x = \ldots\ldots \frac{9}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6} \ldots$$

و بجهت فرض ثانی از احتمال اول این تساوی حاصل است

$$x^2 - 10 = z^2 \qquad (1)$$

فرض میکنیم

$$x - z = A.$$

$$x = A + z$$

$$x^2 = A^2 + z^2 + 2Az$$

پس از گذاشتن مساوی x^2 در تساوی اول حاصل میشود

$$A^2 + 2Az = 10.$$

و

$$z = \frac{10 - A^2}{2A}$$

و

$$x = \frac{10 + A^2}{2A}$$

و نیز A در اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود بجهت x

و z این مقادیر

$$z = \frac{9}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{11}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{19}{6},\ \ldots$$

امّا بجهة احتمال ثانی این دو تساوی حاصل است

$$x^2 - 10 = y^2$$
$$x^2 + 10 = z^2 \qquad (1)$$

و بعد از تفریق یکی از دو تساوی از دیگری این تساوی

$$z^2 - y^2 = 20$$

حاصل است

و بقاعده که مذکور شد در احتمال اول این دو تساوی حاصل آید

$$z = \frac{20 + A^2}{2A}$$

$$y = \frac{20 - A^2}{2A}$$

و A در این دو تساوی مقداری است نامعین پس بجهة z^2 و y^2 جوابهای مالانهایه له حاصل میشود ولیکن نمیتوانیم این جوابها را در تساوی (1) بگذاریم زیرا که x^2 از اینجا اسقاط شده است پس باین قسم عمل میکنیم که $y^2 = \left(\frac{20 - A^2}{2A}\right)^2$ بعد از وضع او در تساوی (1) این تساوی حاصل است

$$x^2 - 10 = \left(\frac{20 - A^2}{2A}\right)^2$$

پس $x^2 = \frac{(20-A^2)^2}{4A^2} + 10 = \frac{400+A^4}{4A^2}$

در این تساوی چون x باید مقدار حقیقی باشد و $4A^2$

که مخرج است مجذور حقیقی است پس صورت کسر نیز باید

یك مجذور حقیقی باشد و فرض میکنیم او را مساوی 9^2

پس این تساوی حاصل است $A^4 + 400 = 9^2$

$A^4 = 9^2 - 400$

و

$A^2 = R$

حال فرض میکنیم

$A^4 = R^2$

پس

$R^2 = 9^2 - 400$

و

$R = \sqrt{9^2 - 400}$

9 در اینجا مقدار بیت نامعین ولیکن باید مقادیری فرض شود

که بعد از تفریق ۴۰۰ از او یك مجذور صحیح حاصل شود و بعد از آنکه

آن مقادیر را معین نمودیم آن ریشهها مساوی R میشود پس باید

نیز در آن مقادیر جستجو نمود از مقادیری که مجذور صحیح باشند زیرا که

R مساوی A^2 فرض شده بود پس بعد از آنکه آن مقادیر را یافتیم جذر

او مساوی است به A و باید دانست که نمیتوانیم بجهت 9 مقداری فرض

نمائیم که مجذور او کوچکتر از ۴۰۰ باشد زیرا اگر کوچکتر باشد بایــد

مانده منفی خواهد بود و عدد منفی جذر ندارد بوجه دیگر

بعد از انکه در تساوی اول یعنی $x^2 - 10 = y^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهة x و y این مقادیر حاصل میشود

$$x = \frac{10 + A^2}{2A}$$

$$y = \frac{10 - A^2}{2A}$$

و بعد از ان که در تساوی دویم یعنی $x^2 + 10 = z^2$

بتنهائی عمل کنیم بجهة x و z این مقادیر حاصل میشود

$$x = \frac{10 - A_1^2}{2A_1}$$

$$z = \frac{10 + A_1^2}{2A_1}$$

حال جستجو میکنیم در دو سلسله مقادیر x از دو تساوی دو مقداری که با هم متساوی باشند پس ان مقدار عدد حقیقی است زیراکه در تساوی اول اگر از مجذور او ده اسقاط کنیم باقی یکمجذور حقیقی است و اگر در تساوی دویم ده بر آن اضافه کنیم حاصل نیز یکمجذور حقیقی است بوجه دیگر

$$x^2 - 10 = y^2$$

$$x^2 + 10 = z^2$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل است $2x^2 = y^2 + z^2$

و بعد از این در مسئله پنجم از ابن لشاوی گفتگو خواهیم نمود
و باید دانست که مجذور مطلوب یعنی ²عد یافت نمیشود
در اعداد صحاح زیرا که تفاضل مجذورات در اعداد متوالیه نیست

٣ ٥ ٧ ٩ ١١

و در اعداد زوج این است ٤٤ ٣٦ ، ٢٨ ، ٢٠ ، ١٢

و در اعداد فرد این است ٣٥ ، ٣٢ ، ٢٤ ، ١٦ ، ٨

و در اعدادی که تفاضل آن دو است این است ٢٣ ، ١٥

و در اعدادی که تفاضل آن سه است این است ٥٦ ، ٢٣

پس یافت نمیشود دو مجذوری که تفاضل آنها ده باشد و نیز
یافت نمیشود این مجذور در اعداد کسور زیرا که هر کسری را
که از او ده عدد نقصان کنیم باقی مانده عدد منفی است و عدد
منفی جذر ندارد پس در صورتی که یک شرط در اعداد کسور
یا صحاح صدق نکند جمع بین الشرطین بطریق اولی صدق نخواهد
کرد المسئلة الثالثة اقر لزید بعشرة الاجذر مال لعمرو
ولعمرو بخمسة الاجذر مال لزید جواب فرض میکنیم مال
زید را ²عد و مال عمرو را ²لا پس از فرض مسئله حاصل
میشود بجهة زید لا - ١٠ و بجهة عمرو x - ٥ پس این

دو تساوی حاصل است $x^2 = 10 - y$ ، $y^2 = 5 - x$

از تساوی اخری $x = 5 - y^2$

و $x^2 = y^4 - 10y^2 + 25$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول

$$10 - y = y^4 - 10y^2 + 25$$

$$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة y^2 y این

$$y^2 = 2.07329$$

و بجهة x^2 این

$$x^2 = 1.55975$$

وجه دیگر هم فرض میکنیم مال عمرو را y^2 پس مال زید

$10 - y$ میشود

و مال عمرو میگردد $5 - \sqrt{10 - y}$

پس این تساوی حاصل است $y^2 = 5 - \sqrt{10 - y}$

$$5 - y^2 = \sqrt{10 - y}$$

$$y^4 - 10y^2 + 25 = 10 - y$$

$$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$$

$$y^2 = 2.07429$$

وجه سیم فرض میکنیم مال زید را x^2 پس مال

عمرو میشود $5 - x$.

ومال زید میشود $10 - \sqrt{5 - x}$.

پس این تساوی حاصل است $x^2 = 10 - \sqrt{5 - x}$.

$$x^2 - 10 = -\sqrt{5 - x}$$

$$x^4 - 20x^2 + 100 = 5 - x$$

$$x^4 - 20x^2 + x + 95 = 0$$

بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة x

$$x = 2,9257$$

پس مال زید این میشود $x^2 = 8,55975$

وجه چهارم فرض میکنیم مال زید را x پس مال

عمرو میشود $5 - \sqrt{x}$

ومال زید میشود $10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

پس این تساوی حاصل است $x = 10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}$

$$x - 10 = -\sqrt{5 - \sqrt{x}}$$

$$x^2 - 20x + 100 = 5 - \sqrt{x}$$

$$x^4 - 40x^3 + 590x^2 - 3800x + 9025 = 0$$

$$x^{۴} - ۴۰x^{۳} + ۵۹۰x^{۲} - ۳۸۰۱x + ۹۰۲۵ = ۰$$

$$x = ۸\ ۵۵۱۷۵$$

اگرچه بچند وجه دیگر این مسئله را حل نموده ام لیکن در اینجا بهمین چهار وجه اکتفا نمودیم **المسئلة الرابعة** عشرة مقسومة بقسمین اذا قسمنا کلا منهما علی الآخر وجمعنا الخارجین کان المجتمع مساویا لاحد قسمی العشرة **جواب** فرض میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x پس قسمت دیگر $۱۰ - x$ میشود

از اینجا این تساوی حاصل است $\frac{x}{۱۰ - x} + \frac{۱۰ - x}{x} = x$

$$x^{۲} + x^{۲} - ۲۰x + ۱۰۰ = ۱۰x^{۲} - x^{۳}$$

پس

$$x^{۳} - ۸x^{۲} - ۲۰x + ۱۰۰ = ۰$$

وبعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهة x این دو جواب

$$x = ۲,۸۷۸۴$$

$$x = ۸,۹۸۷۳$$

پس بجهة قسمت دیگر عشره این دو جواب حاصل است

$$۱۰ - x = ۷,۱۲۱۶$$

$$۱۰ - x = ۱,۰۱۲۷$$

یعنی این مسئله دو حالت دارد یکی آنکه تقسیم کنیم عشره را بدو

قسمت بطوری که بعد از عمل حاصل مساوی قسمت اصغر شود ٧,١٢١٧

و این دو قسمت است ٢,٨٧١٣

ودیگری آنکه حاصل مساوی قسمت اعظم شود و این دو قسمت است

وجه ثانی فرض میکنیم یکی از دو قسمت عشره را x ودیگری را y پس این تساوی حاصل است

$$x + y = 10 \quad (1)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 y \quad (2)$$

$$x = 10 - y$$

$$y^2 - 20y + 100 = x^2$$

واز تساوی اول

$$y^2 - 20y + 100 + y^2 = y^3 - 20y^2 + 100y$$

$$y^3 - 22y^2 + 120y - 100 = 0$$

$$y = 7,1217$$

$$y_1 = 1,0127$$

وجه ثالث با آنکه از تساوی اول $y = 10 - x$

$$y^2 = x^2 - 20x + 100$$

و

بعد از وضع او در تساوی دوم $2x^2 - 20x + 100 = 10x^2 - x^3$

$$x^3 - 8x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$x = 2.8283$$

$$x_1 = 1.9872$$

وجه رابع فرض میکنیم یکی از دو قسمت را x پس قسمت دیگر $10 - x$ است و پس از آن این تساوی حاصل است

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = 10 - x$$

$$x^2 + x^2 - 20x + 100 = x^3 - 20x^2 + 100x$$

$$x^3 - 22x^2 + 120x - 100 = 0$$

$$x = 7.1217$$

$$x_1 = 1.0127$$

وجه خامس

$$x + y = 10$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$$

$$x^2 + y^2 = xy^2$$

$$x^2 + y^2 = 100 - 2xy$$

$$xy^2 = 100 - 2xy$$

حال هرگاه فرض کنیم $x = 10 - y$

پس $10y^2 - y^3 = 100 - 20y + 2y^2$

و $y^3 - 8y^2 - 20y + 100 = 0$

$y = ٢,٨٧٨٣$

$y_1 = ٨,٩٨٧٣$

وجه سادس واگر فرض کنیم $y = ١٠ - x$

$y^٢ = x^٢ - ٢٠x + ١٠٠$

$x^٣ - ٢٠x^٢ + ١٠٠x = ١٠٠ - ٢٠x + ٢x^٢$

$x^٣ - ٢٢x^٢ + ١٢٠x - ١٠٠ = ٠$

$x = ٧,١٢١٧$

$x = ١,٠١٢٧$

اگر چه وجوه بسیار است ولیکن بهمین قدر اکتفا نمودیم

المسئلة الخامسة مجذور اذا زید علیه جذره و درهمان او

نقص منه جذره و درهمان کان للمجتمع او الباقی جذر

جواب این عبارت نزد من دو احتمال دارد احتمال اول که ظاهر

از عبارت خلاصه است آنکه شرط یکی از زیاده و نقصان باشد

بعنوان بدلیت یعنی یکی از زیاده یا نقصان کفایت کند در محقق

مسئله که در حقیقت این مسئله راجع بدو مسئله شده است هکذا

مجذور اذا زید علیه جذره و درهمان کان للمجتمع جذر و مجذور

اذا نقص منه جذره و درهمان کان للباقی جذر اما بنابر فرض اول

از

از احتمال اوّل فرض میکنیم ان مجذور را x^2

پس این تساوی حاصل است $x^2 + x + 2 = y^2$

و فرض میکنیم $y - x = A$

و $y = A + x$

و $y^2 = A^2 + x^2 + 2Ax$

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اوّل

$$x + 2 = A^2 + 2Ax$$

$$(2A - 1)x = 2 - A^2$$

$$x = \frac{2 - A^2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{2 + A^2 - A}{2A - 1}$$

در این دو فرمول کلّی مقدار A نامعیّن پس حاصل میشود بجهة x و y این مقادیر

$A = \ldots\ldots 0 ، \frac{2}{3} ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots -2 ، \frac{42}{9} ، 1 ، -\frac{2}{3} ، -1\frac{2}{5} ، -2 ، \ldots\ldots$

$y = \ldots\ldots -2 ، \quad ، 2 ، 1\frac{1}{3} ، 1\frac{3}{5} ، 2 ، \ldots\ldots$

امّا بنا بر فرض ثانی از احتمال اوّل فرض میکنیم ان مجذور را x^2 این تساوی حاصل است $x^2 - x - 2 = z^2$

فرض میکنیم $x - z = A$

و $-z = A - x$

و $z^2 = A^2 + x^2 - 2Ax$

بعد از گذاشتن مساوی z^2 را در تساوی اول

$-x - 2 = A^2 - 2Ax$

$(2A - 1)x = A^2 + 2$

$$x = \frac{A^2 + 2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{3A^2 - A + 2}{2A - 1}$$

A نیز در اینجا مقدار نامعین است پس حاصل میشود بجهة

x و y این مقادیر

$A = \ldots\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$

$x = \ldots\ -2,\ 3,\ 2,\ 2\frac{1}{5},\ 2\frac{4}{7}\ \ldots$

$y = \ldots\ -2,\ 4,\ 4,\ 5\frac{1}{5},\ 6\frac{4}{7}\ \ldots$

وهرگاه بخواهیم این دو فرض و سایر فرضهای دیگر را بیک

لفظ ادا کنیم باین قسم عمل میکنیم $x^2 \pm x \pm a = y^2$.

$\pm y \mp x = A$

$\pm y = A \pm x$

$$\pm y^2 = A^2 + x^2 \pm 2Ax.$$

$$\pm x \pm a = A^2 \pm 2Ax.$$

$$(\pm A \mp 1)\, x = \pm a - A^2$$

$$x = \frac{\pm a - A^2}{\pm 2A \mp 1} \ \ldots$$

واگر فرض کنیم که بایست بر مجذور مطلوب جذر اورا افزود و a را نقصان نمود یا جذر را نقصان نمود و a را اضافه کرد باز

$$x^2 \pm x \mp a = z^2$$

قسم عمل میکنیم

$$\pm z \mp x = A$$

$$\pm z = A \pm x$$

$$z^2 = A^2 + x^2 \pm 2Ax$$

$$\pm x \mp a = A^2 \pm 2Ax$$

$$(\pm A \mp 1).\, x = \mp a - A^2$$

$$x = \frac{\mp a - A^2}{\pm 2A \mp 1}$$

واحتمال ثانی که ضعیف است انکه هر یک از زیاده و نقصان مدخلیت در تحقق مسئله داشته باشد پس صاحب فرض مسئله این دو تساوی حاصل است

x [illegible] $a + 2 = y^2$

$$x^2 - x - 2 = y^2$$

اولاً میتوانیم باین قاعده حل مسئله را نمائیم که در تساوی
اوّل بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول حاصل شود

$$x = \frac{2 - A^2}{2A - 1}$$

$$y = \frac{2 + A^2 - A}{2A - 1}$$

و بعد از آن در تساوی دویم بتنهائی عمل کنیم تا این دو فرمول

$$x = \frac{2 + A_1^2}{2A_1 - 1} \qquad y_1 = \frac{2A_1^2 - A_1 + 2}{2A_1 - 1}$$

نیز حاصل شود

چون A در این دو فرمول x مقداری است نامعین پس
حاصل میشود بجهة x دو سلسله مقادیر ما لانهایه حال
جستجو میکنیم در این دو سلسله مقادیر مقداری را که مشترک
باشد در هر دو سلسله که او مقدار x است بجهة آنکه صدق
میکند در تساوی اوّل از بابت اینکه از فرمول اول است و صدق
میکند در تساوی دوّم از بابت اینکه از فرمول دویم است

وجه ثانی اعاده میکنیم دو تساوی اوّل را

$$x^2 + x + 2 = y^2 \qquad (1)$$

$$x^2 - x - 2 = z^2 \qquad (2)$$

بعد از جمع نمودن دو تساوی این تساوی حاصل است

$x^2 = z^2 + y^2$ (۲)

فرض میکنیم $x - z = A$

و $x = A + z$

و $x^2 = A^2 + z^2 + 2Az$

$2x^2 = 2A^2 + 2z^2 + 4Az$

بعد از گذاشتن مساوی $2x^2$ را در تساوی سیم

$2A^2 + z^2 + 2Az = y^2$

$z^2 + 2Az = y^2 - 2A^2$

$z = -2A \pm \sqrt{y^2 + 2A^2}$

حال چون که z باید مقدار حقیقی باشد پس مقدار زیر رادیکال باید

یکجذر حقیقی باشد فرض میکنیم $y^2 + 2A^2 = R^2$

خلاصه بعد از عمل کردن در این تساوی حاصل میشود بجهت

y و A و R این سه فرمول کلی $A = 2pq$

$R = p^2 + 2q^2$

$y = p^2 - 2q^2$

p و q در این سه فرمول مقادیر نامعین هستند پس حاصل میشود

بجهت z $z = -A + R = p^2 + 2q^2 - 2pq$

و چون که این $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

پس $x = p^2 + 2q^2 - 2pq$

$y = p^2 - 2q^2$

$z = p^2 + 2q^2 - 2pq$

حال حاصل میشود بجهة x و y و z جوابهای الی غیر نهایة ولیکن
جمیع این جوابها صدق نمیکند در تساویهای اول و دویم پس باید جستجو
نمود میان مقادیر x مقداری را که هر گاه بگذاریم در تساوی
(۱) یا در تساوی دویم صدق نماید پس مجذور آن مقدار مجذور
مطلوب است و باید دانست که این مجذور یافت نمیشود در اعداد صحاح
زیرا که در قواعد مجذورات مبین شده است که چون جذر هر مجذور
مضاعف نمایند و واحدی بر آن علاوه نموده مجموع را بر آن مجذور
اضافه کنند مجذور تالی آن حاصل میشود مثلا ۲۵ مجذور است و جذر
آن ۵ و مضاعف آن ده چون واحد اضافه آن نمایند یازده میشود
چون یازده را اضافه ۲۵ نمایند ۳۶ میشود که مقدار تالی ۲۵ است
و این قاعده مطرد است در اعداد صحاح و معلوم است که ضعف جذر
بعلاوه واحد همیشه بزرگتر است از جذر بعلاوه دو و در غیر مجذور
واحد کما لا یخفی پس اگر آن عدد صحیح باشد لازم می آید که مابین دو مجذور

متوالی مجذور و واسطه یافت شود هذا خلف چون عدم تحقق
یک شرط از شروط لازم دارد عدم تحقق مشروط را مطلقا از
این جهة حاجت گفتگو در تحقق شرط ثانی با عدم تحقق آن نیست
و هم چنین یافت نمیشود در اعداد کسور زیرا که کلیة جذر کسور
همیشه بزرگتر است از مجذورش پس اگر جذر فقط را اسقاط کنیم
از مجذورش باقی مانده عدد منفی میشود و عدد منفی جذر ندارد
و چون مسئله ثانیه نیز منتهی شده بود باین تساوی $2x^2 = y^2 + z^2$
پس بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمولات حاصل

میشود
$$x = p^2 + 2q^2 - 2pq$$
$$y = p^2 - 2q^2$$
$$z = p^2 + 2q^2 - 4pq$$

ولیکن جمیع این مقادیر نیز در تساویهای اول صدق نمیکند پس
باید جستجو نمود در میان مقادیر x مقداری را که در این تساوی
$x^2 + 10 = y^2$ یا در این تساوی $x^2 - 10 = z^2$
صدق نماید پس بعد از یافتن این مقدار x مطلوب بدست و اگر
مقصود سائل از مسئله این باشد که بعد از تحویل تساوی این
تساویها حاصل شود (1)
$$\left.\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= y^2 \\ x^2 + x + 2 &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= y^2 \\ x^2 + x + 2 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= y^2 \\ x^2 - x - 2 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

میتوانیم جمیع این تساویها را حل نمائیم بقاعده که اول مذکور شد

المسئلة السادسة ثلاثة مربعات متناسبة مجموعها مربع

جواب چون در این مسئله بیان ننموده که این مربعات بچه نسبت حاصل باشند پس میتواند نسبت عددی قصد کرده باشد و میتواند نسبت هندسی اوّلا فرض میکنیم که نسبت عددی قصد کرده باشد پس این تساویها حاصل است $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$

$$x^2 \cdot y^2 : y^2 \cdot z^2$$

از تساوی دویم $x^2 = 2y^2 - z^2$

بعد از گذاشتن مساوی x^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$3y^2 = v^2$ بعد از گرفتن جذر $\sqrt{3y^2} = v$

پس $\sqrt{3} \cdot y = v$

در این تساوی اخری میتوانیم y را هر مقداری که بخواهیم فرض نمائیم پس اگر ضرب کنیم او را در جذر سه حاصل مساوی v میشود بمقدار

تقریبی و چون v باید مقدار حقیقی باشد پس این مسئله مستحیل است
و یافت نمیشود سه مجذور متناسب بتناسب عددی که مجموع آنها
مجذور باشد و ثانیا فرض میکنیم که نسبت هندسی قصد کرده باشند
پس حاصل میشود این دو تساوی (۱) $x^2+y^2+z^2=v^2$

$$x^2 : y^2 :: y^2 : z^2 \quad (۲)$$

و

$$x : y :: y : z$$

$$y^2 = xz$$

بعد از گذاشتن مساوی y^2 را در تساوی اول حاصل میشود

$$x^2 + xz + z^2 = v^2$$

خلاصه بعد از عمل کردن حاصل میشود بجهة x و z و v
این فرمولات

$$x = 2pq + q^2$$

$$z = p^2 - q^2$$

$$v = p^2 + pq + q^2$$

p و q در این فرمولات هستند مقادیر نامعین پس حاصل
میشود بجهة x و z و v از مقادیر نامعین ولیکن جمیع
این مقادیر صدق نمیکنند در تساویهای اول زیرا اگر حاصل ضرب
xz در همه صور مجذور صحیح نمیشود و فرض نموده بودیم اورا

مساوی y^2 یعنی $y^2 = xz$ پس باید p و q را مقداری فرض نمائیم
که چون x و z معلوم شدند حاصل ضربشان یک مجذور صحیحی
باشد پس این مقدار x حقیقی است و z و y و y^2 از آن قرار معین
میشوند المسئلة ۱۰ مکعب قسمتی بقسمین مکعبین جواب
بنابر فرض صدق مسئله این تساوی حاصل است

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad (1)$$

فرض میکنیم $z - x - y = A$ و $z = A + x + y$

$$z^3 = A^3 + 3A^2x + 3A^2y + 3Ax^2 + 6Axy + 3Ay^2 + 3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3$$

$$z^3 =$$

$$0 = A^3 + 3A^2x + 3A^2y + 3Ax^2 + 6Axy + 3Ay^2 + 3x^2y + 3xy^2 \quad (2)$$

$$(3A + 3y)x^2 + (3A^2 + 6Ay + 3y^2)x + (A^3 + 3A^2y + 3Ay^2) = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{3A + 3y}\right)x + \left(\frac{A^3 + 3A^2y + 3Ay^2}{3A + 3y}\right) = 0$$

$$(3) \quad x = -\left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{6A + 6y}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3A^2 + 6Ay + 3y^2}{6A + 6y}\right)^2 - \frac{2A^3 + 6A^2y + 6Ay^2}{6A + 6y}} = -a \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{9A^4 + 36A^3y + 54A^2y^2 + 9y^4 - (12A^4 + 48A^3y + 72A^2y^2 + 36Ay^3)}{(6A + 6y)^2}} =$$

$$\frac{-(3A^2 + 6Ay + 3y^2) \pm \sqrt{9y^4 - 18A^2y^2 - 12A^3y - 3A^4}}{6A + 6y}$$

حال چون x باید مقدار حقیقی باشد پس باید مقدار زیر رادیکال
مثبت مجذور حقیقی باشد پس فرض میکنیم او را مساوی t^2 پس

(۴) این تساوی حاصل است $9y^4 - 18A^2y^2 - 12A^3y - 3A^4 = q^2$

حال فرض میکنیم $9 = m^2 \,,\; -18A^2 = C$

$(-12A^3) = D \,,\; (-3A^4) = E$

پس تحویل میشود تساوی (۴) باین تساوی

$$m^2y^4 + Cy^2 + Dy + E = q^2 \qquad (۵)$$

خلاصه بعد از عمل نمودن در این تساوی این فرمول کلی حاصل است

$$y = \frac{C^2 - 4Em^2}{4Dm^2} \qquad (۶)$$

حال هرگاه A را واحد فرض نمائیم و مساوی بها m^2 و C و D و E را در ان فرمول بگذاریم حاصل میشود مجهول y منتهای واحد یعنی $y = -1$ وهرگاه فرض نمائیم $A=2$ حاصل میشود $y = -2$ وهرگاه فرض نمائیم $A = 3$ حاصل میشود $y = -3$ وهمچنین هرگاه فرض نمائیم $A = -1$ حاصل میشود $y = 1$ وهرگاه فرض نمائیم $A = -2$ حاصل میشود $y = 2$ واگر فرض نمائیم $A = -3$ حاصل میشود $y = 3$ وهمچنین اگر فرض نمائیم $A = 0$ حاصل میشود $y = 0$ وچون این مقادیر y را بگذاریم در تساوی (۴) حاصل میشود در جمیع حالات

بجهة q صفر یعنی $q = 0$ وهرگاه مقادیر A و y و q
رابگذاریم در تساوی (۳) حاصل میشود در جمیع حالات بجهة
x صفر یعنی $x = 0$ وهرگاه در تساوی (۲) بجهة کوئفیسیان
های y^2 ، y فاکتر یکپر یعنی y را مجهول فرض نمائیم پس بعد
از عمل کردن حاصل میشود $9x^4 - 18A^2x^2 - 12A^3x - 3A^4 = q^2$
وکوئفیسیانهای x در این تساوی بعینه همان کوئفیسیانهائی
y است در تساوی (۲) پس در این تساوی A را هر مقدار
فرض نمائیم حاصل میشود نیز بجهة q و y صفر پس معلوم شد که
این مسئله مستحیل است زیرا که اگر جواب عددی داشت حاصل میشد اگر
یکی از این فروض بجهة q و x یکمقدار عددی
ولیکن اگر فرض کنیم که یکمسئله منتهی شده است باین تساوی

$$y^4 + 3y^2 - 5y + 6 = q^2$$

و بخواهیم که مقادیر y و q را معین نمائیم کوئفیسیانهای
این تساوی را بگذاریم در فرمول (۶) حاصل میشود بجهة
y ، $\frac{3}{2}$ یعنی $y = \frac{3}{2}$ و $q = \frac{33}{4}$
وهم چنین هرگاه فرض نمائیم در یکمسئله $y = -2$ وبعد از آنکه
عمل نمائیم در آن تساوی حاصل میشود اینجمله $4y^4 \ldots y^2 - 5y - 13$

داز

والآن از خارج میدانیم که y در اینجا مساوی است بمنهای ۲ و ۳ حاصل جمع این جمله مساویست به ۴۹ ولیکن میخواهیم بدانیم که اگر بواسطه این فرمول عمل کنیم بجهة y و حاصل جمع چه مقدار حاصل میشود پس فرض میکنیم او را مساوی q^2 پس حاصل میشود این تساوی $4y^4 - 3y^2 - 5y - 12 = q^2$ و بعد از وضع کوئیفیسیانها را در فرمول (۹) حاصل میشود بجهة y این مقدار

$-\frac{217}{15}$ یعنی $y = -\frac{217}{15}$

و $q = \frac{19378}{9400}$

پس معلوم شد که این فرمول کلی است و هر تساوی که باین صورت نوشته شود $m^2y^4 + Cy^2 + Dy + E = q^2$ بواسطه این فرمول حل میشود پس واضح شد که مسئله مفروضه غلط فرض شده است که بواسطه این فرمول جوابی حاصل نشد والا باید اقلاً یک جواب از او حاصل شود و باینجا ختم نمودیم

گفتگو را در مسائل سبعه

والحال ذکر میکنیم یک تساوی مشکلی را که به بیست و دو وجه او را حل نموده ام و در ضمن آن بیان میشود یک قاعده مهم تحویل نمودن هر تساوی مخلوطی را که از درجات اعلی باشد به درجه

دو قیم بلکه بدرجه اولی و نیز اکثر قواعد جبریه در این ضمن
استعمال میشود و بسیار مفید است از برای متعلمین
وجوهی که منتهی میشود بدرجهٔ دو قسم

اول

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$$xy + xy^4 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^4 - xy^2 = 18y - 12$$

$$x(y^4 - y^2) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y)(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$x(y^2 + y) = 12$$

$$12(y^2 - y) = 18y - 12$$

$$12y^2 - 12y = 18y - 12$$

$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 , \frac{1}{2}$$

$2x + 4x = 12$ یا $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 12$

$9x = 12$ یا $\frac{9}{4}x = 12$

$x = 2$ یا $x = 16$

وجه دوّم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 12 \\ x + xy^3 = 18 \end{cases}$$

$xy + xy^4 = 18y$

$xy + xy^2 = 12$

$xy^4 - xy^2 = 18y - 12$

$xy^2(y^2 - 1) = 18y - 12$

$xy^2(y+1)(y-1) = 18y - 12$

$xy(y+1) = 12$

$$\frac{xy^2(y+1)(y-1)}{xy(y+1)} = \frac{18y-12}{12} = \frac{3y-2}{2}$$

$y(y+1) = \frac{3y-2}{2}$

$2y^2 - 2y = 3y - 2$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$

$y = 2,\ \frac{1}{2}$

$2x + 4x = 12$

$9.x = 14 \quad , \quad x = 2 \, , \, 16.$

وجه ششم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{30}{6} = 5.$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y^2-1)(y-1)} = 5.$$

$$\frac{(y^2+1)(y+1)}{(y+1)(y-1)(y-1)} = 5.$$

$$\frac{y^2+1}{(y-1)(y-1)} = 5$$

$$y^2+1 = 5(y^2 - 2y + 1)$$

$$y^2+1 = 5y^2 - 10y + 5$$

$$4y^2 - 10y + 4 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 \, , \, \frac{1}{2}.$$

$$x = 2 \, , \, 16$$

وجه چهارم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

$$xy + xy^4 = 18y$$

$$xy + xy^2 = 12$$

$$xy^4 - xy^2 = 18y - 12$$

$$xy^2(y^2-1) = 18y - 12$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 90$$

$$x(y^2-1)(y-1) = 90$$

$$\frac{xy^2(y^2-1)}{x(y^2-1)(y-1)} = \frac{18y-12}{9}$$

$$\frac{y^2}{y-1} = 3y - 2$$

$$y^2 = 3y^2 - 5y + 2$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 \quad \frac{1}{2}$$

$$x = 4 , 16$$

وجه پنجم

$$\begin{cases} xy + xy^2 = 120 \\ x + xy^3 = 180 \end{cases}$$

وجه ششم

$$xy^3 + xy^4 = 12y^2$$
$$xy^4 + x = 18$$

$$xy^4 - x = 12y^2 - 18$$
$$x(y^4 - 1) = 12y^2 - 18$$

$$x(y^2+1)(y+1)(y-1) = 12y^2 - 18$$

$$x(y+1) = \frac{12}{y}$$

$$\frac{12}{y}(y^2+1)(y-1) = 12y^2 - 18$$

$$12y^3 - 12y^2 + 12y - 12 = 12y^3 - 18y$$

$$-12y^2 + 12y - 12 = -18y$$

$$12y^2 - 30y + 12 = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y = 2 , \frac{1}{2}$$

$$x \times 3 = \frac{12}{2}$$

$$3x = 6$$

$$x = 2, 16$$

$$xy + xy^2 = 12$$
$$x + xy^4 = 18$$

$$xy^۲ + xy^۵ = ۱۸y^۲$$
$$xy^۲ + xy = ۱۲.$$

$$xy^۵ - xy = ۱۸y^۲ - ۱۲.$$
$$xy(y^۴ - ۱) = ۱۸y^۲ - ۱۲.$$
$$xy(y^۲ + ۱)(y^۲ - ۱) = ۱۸y^۲ - ۱۲$$
$$xy(y^۲ + ۱)(y + ۱)(y - ۱) = ۱۸y^۲ - ۱۲.$$
$$xy(y + ۱) = ۱۲.$$

$$۱۲(y^۲ + ۱)(y - ۱) = ۱۸y^۲ - ۱۲.$$
$$۱۲y^۳ - ۱۲y^۲ + ۱۲y = ۱۸y^۲$$
$$۱۲y^۳ - ۳۰y^۲ + ۱۲y = ۰$$
$$۱۲y^۲ - ۳۰y + ۱۲ = ۰$$
$$y^۲ + \frac{۵}{۲} y + ۱ = ۰$$
$$y = ۲ \ , \ \frac{۱}{۲}$$
$$x = ۲ \ , \ ۱۶$$

وجه هفتم

$$\begin{cases} xy + xy^۲ = ۱۲ \\ x + xy^۳ = ۱۸. \end{cases}$$

$$xy^۲ + xy^۳ = ۱۲y$$
$$x + xy^۳ = ۱۸.$$

$xy^2 - x = 12y - 180$

$xy^2 - 12y - x = -180$

$xy^2 + xy \quad = 120$

$12y + xy + x = 300$

$xy^2 + 12y^2 + xy = 300y$

$xy^2 \quad + xy = 120$

$12y^2 = 300y - 120$

$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$

$y - \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4}$

$y = 2 \ , \ \frac{1}{2}$

$x + 8x = 180$ | $x + \frac{1}{8}x = 18$

$9x = 180$ | $\frac{9}{8}x = 180$

$x = 2$ | $x = 19$

وجه هشتم

$xy + xy^2 = 120$

$x + xy^3 = 180$

$xy^2 + xy^3 = 12y$

$x + xy^3 = 180$

$$xy^2 - x = 12y - 18$$

$$xy^2 - 12y - x = -18$$

$$xy^2 + xy = 12$$

$$12y + xy + x = 30 \quad \ldots\ldots *$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 30$$

$$(x + xy)(1 + y^2) = 30$$

$$x + xy = \frac{30}{1 + y^2}$$

$$x + xy = 30 - 12y \quad \ldots\ldots *$$

$$\frac{30}{1 + y^2} = 30 - 12y$$

$$30 = 30 - 12y + 30y^2 - 12y^3$$

$$12y^3 - 30y^2 + 12y = 0$$

$$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \qquad y = 2,\ \frac{1}{2}$$

وجه خامس

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^2 = 18$$

$$xy + xy^3 = 12y$$

$$x + xy^3 = 18$$

$$xy^2 - x = 12y - 18$$

$$x(y^{2}-1) = 12y - 18.$$

$$x - xy - xy^{2} + xy^{3} = 30.$$

$$x(y^{2}-1)(y-1) = 6.$$

$$(12y - 18)(y-1) = 6.$$

$$12y^{2} - 30y + 18 = 6.$$

$$12y^{2} - 30y + 12 = 0$$

$$y^{2} - \frac{5}{2}y + 1 = 0$$

$$y - \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4}.$$

$$y = 2 \;\cdot\cdot\; \frac{1}{2}.$$

$$x + 8x = 18. \qquad x + \frac{1}{8}x = 18.$$

$$x = 2 \qquad x = 16$$

وجوهی که منتهی میشود بدرجه ثانیه و جذر اول

$$xy + xy^{2} = 12$$

$$x + xy^{2} = 18. \quad \dots\dots \quad *$$

$$xy + xy^{4} = 18y.$$

$$xy + xy^{2} = 12.$$

$$x(y^{2} - y^{4}) = 12 - 18y.$$

$$x = \frac{۱۲ - ۱۸y}{y^۲ - y^۴} \cdots *$$

$$x = \frac{۱۲}{y^۲ + y}$$

$$\frac{۱۲ - ۱۸y}{y^۲ - y^۴} = \frac{۱۲}{y^۲ + y}$$

$$۱۲y - ۱۸y^۲ + ۱۲y^۲ - ۱۸y^۳ = ۱۲y^۲ - ۱۲y^۴$$

$$۱۲y^۴ - ۱۸y^۳ - ۱۸y^۲ + ۱۲y = ۰$$

$$۲y^۳ - ۳y^۲ - ۳y + ۲ = ۰$$

$$y^۳ - \frac{۳}{۲}y^۲ - \frac{۳}{۲}y + ۱ = ۰$$

وجه ثانی

$$x = \frac{۱۸}{۱ + y^۳} \cdots *$$

$$x = \frac{۱۲ - ۱۸y}{y^۲ - y^۴} \cdots *$$

$$\frac{۱۲ - ۱۸y}{y^۲ - y^۴} = \frac{۱۸}{۱ + y^۳}$$

$$۱۲ - ۱۸y + ۱۲y^۳ - ۱۸y^۴ = ۱۸y^۲ - ۱۸y^۴$$

$$۲y^۳ - ۳y^۲ - ۳y + ۲ = ۰$$

وجه ثالث

$$xy + xy^۲ = ۱۲$$

$$x + xy^۳ = ۱۸$$

$$xy + xy^۲ + \frac{xy + xy^۲}{۲} = x + xy^۳$$

$$۳xy + ۳xy^{۲} = ۲x + ۲xy^{۳}$$

$$۳y + ۳y^{۲} = ۲ + ۲y^{۳}$$

$$۲y^{۳} - ۳y^{۲} - ۳y + ۲ = ۰$$

وجه رابع

$$xy + xy^{۲} = ۱۲$$

$$x + xy^{۳} = ۱۸$$

$$\frac{xy + xy^{۲}}{x + xy^{۳}} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{y + y^{۲}}{۱ + y^{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

$$۳y + ۳y^{۲} = ۲ + ۲y^{۳} ,\quad ۲y^{۳} - ۳y^{۲} - ۳y + ۲ = ۰$$

وجه خامس

$$xy + xy^{۲} = ۱۲$$

$$x + xy^{۳} = ۱۸$$

$$x(y + y^{۲}) = ۱۲$$

$$x = \frac{۱۲}{y + y^{۲}}$$

$$x(۱ + y^{۳}) = ۱۸$$

$$x = \frac{۱۸}{۱ + y^{۳}}$$

$$\frac{۱۲}{y + y^{۲}} = \frac{۱۸}{۱ + y^{۳}}$$

$$۱۲ + ۱۲y^{۳} = ۱۸y + ۱۸y^{۲}$$

$$۱۲y^{۳} - ۱۸y^{۲} - ۱۸y + ۱۲ = ۰$$

$$۲y^{۳} - ۳y^{۲} - ۳y + ۲ = ۰$$

وجه سادس

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 90$$
$$\frac{xy + xy^2}{2} = 90$$
$$2x + 2xy^3 - 2xy - 2xy^2 = xy + xy^2$$
$$2 + 2y^3 - 2y - 2y^2 = y + y^2$$
$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه سابع

$$xy + xy^2 = 120$$
$$x + xy^3 = 180$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 300$$
$$x(1 + y + y^2 + y^3) = 300$$
$$x(y^2 + y) = 120$$
$$x = \frac{120}{y^2 + y}$$
$$120 + 120y + 120y^2 + 120y^3 = 300y + 300y^2$$
$$2 + 2y + 2y^2 + 2y^3 = 5y + 5y^2$$
$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه ثامن

$$x = \frac{180}{1 + y^3}$$

$$18 + 18y + 18y^2 + 18y^3 = 30 + 30y^3$$

$$12y^3 - 18y^2 - 18y + 12 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجه رابع

$$xy + xy^2 = 12$$
$$x + xy^3 = 18$$

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = 30$$
$$x - xy - xy^2 + xy^3 = 6$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3}{x - xy - xy^2 + xy^3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3}{1 - y - y^2 + y^3} = 5$$

$$1 + y + y^2 + y^3 = 5 - 5y - 5y^2 - 5y^3$$

$$4y^3 - 6y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0$$

وجوهی که منتهی میشود بجبر چهارم

وجه اول

$$xy + xy^2 = 12$$
$$x + xy^3 = 18$$

$$x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5 = 216$$

$$6x + 6xy^3 + 9xy + 9xy^2 = 216$$

$$x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5 = 6x + 6xy^3 + 9xy + 9xy^2$$

$$xy + xy^2 + xy^4 + xy^5 = 6 + 6y^3 + 9y + 9y^2$$

$$x(y + y^2 + y^4 + y^5) = 6 + 6y^3 + 9y + 9y^2$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}$$

$$12y + 12y^2 + 12y^4 + 12y^5 = 6y + 6y^4 + 9y^2 +$$

$$+ 9y^3 + 6y^2 + 6y^5 + 9y^3 + 9y^4$$

$$4 + 4y + 4y^3 + 4y^4 = 2 + 2y^3 + 3y + 3y^2 +$$

$$+ 2y + 2y^4 + 3y^2 + 3y^3$$

$$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$$

وجه دوم

$$xy + xy^2 = 12.$$

$$x + xy^3 = 18.$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 + \frac{x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3}{2}$$

$$= x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5.$$

$$3x^2y^2 + 3x^2y^4 + 6x^2y^3 = 2x^2y + 2x^2y^2 + 2x^2y^4 + 2x^2y^5$$

$$3y^2 + 3y^4 + 6y^3 = 2y + 2y^2 + 2y^4 + 2y^5.$$

$$2y^5 - y^4 - 6y^3 - y^2 + 2y = 0$$

$$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$$

وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجه پنجم

$$xy + xy^2 = 12$$

$$x + xy^3 = 18.$$

$$\frac{x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5}{} = 216.$$

$$\sqrt{x^2y + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^5} = 6.$$

$$\frac{xy + xy^2}{2} = 6.$$

$$8x^2y + 8x^2y^2 + 8x^2y^4 + 8x^2y^5 = x^3y^3 + 3x^3y^4 + 3x^3y^5 + x^3y^6$$

$$8y + 8y^2 + 8y^4 + 8y^5 = xy^3 + 3xy^4 + 3xy^5 + xy^6.$$

$$8 + 8y + 8y^3 + 8y^4 = xy^2 + 3xy^3 + 3xy^4 + xy^5.$$

$$x(y^2 + 3y^3 + 3y^4 + y^5) = 8 + 8y + 8y^3 + 8y^4.$$

$$x = \frac{12}{y + y^2}.$$

$$12y^2 + 36y^3 + 36y^4 + 12y^5 = 8y + 8y^2 + 8y^4 + 8y^5 +$$
$$+ 8y^2 + 8y^3 + 8y^5 + 8y^6.$$

$$3y + 9y^2 + 9y^3 + 3y^4 = 2 + 2y + 2y^3 + 2y^4 +$$
$$+ 2y + 2y^2 + 2y^4 + 2y^5.$$

$$2y^5 + y^4 - 7y^3 - 7y^2 + y + 2 = 0$$

۹ وجهی که منتهی میشود بمخلوطی از درجهٔ ششم

$$xy + xy^2 = 12.$$
$$x + xy^3 = 108.$$

$$x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 + \frac{x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3}{2} +$$

$$+x^2y^2 + x^2y^4 + 2x^2y^3 = x^4 + 2x^2y^3 + x^2y^6$$

$$\frac{9x^2y^2 + 9x^2y^4 + 18x^2y^3}{4} = x^4 + x^2y^6 + 2x^2y^3$$

$$9x^2y^2 + 9x^2y^4 + 18x^2y^3 = 4x^4 + 4x^2y^6 + 8x^2y^3$$

$$9y^2 + 9y^4 + 18y^3 = 4 + 4y^6 + 8y^3$$

$$4y^6 - 9y^4 - 10y^3 - 9y^2 + 4 = 0$$

بهمان طریق که جستجو نمودیم بجهت تعیین y میتوانیم جستجو نمائیم بجهت تعیین x و غیر از وجوه مذکوره وجوه دیگر نیز بسیار است ولیکن ما بهمین قدر اکتفا نمودیم مخفی نماند که چون عمل جبری منتهی شود بمخلوطی از درجه سیم و یا بالاتر اهل اروپا دیگر تصرف دران نمینمایند جز تصرف مخصوص که در حل مخلوطی از ان درجه بیان نموده اند و ان تصرف بغایت صعب و مشکل است و با زحمت زیاد جواب حاصل میشود ولکن ما بعنایت الله تعالی و حسن تربیت بندگان اقدس شهریاری خلد الله ملکه ملهم شدیم بیک قاعده بسیار سهل که جاری میشود در جمیع معادلات از هر درجه که بوده باشد و نامیدیم اورا بقاعده تحویل و ان قاعده این است

که در یک مسئله هر گاه عمل نمائیم تا انکه منتهی شود بمخلوطی از درجه m بعد بطریق دیگر عمل میکنیم تا انکه منتهی شود بمخلوطی از

درجه $m+n$ یا $m-n$ حال تقسیم میکنیم
مخلوطی درجهٔ بزرکتر را بر مخلوطی درجهٔ کوچکتر و در میان این
مقسوم و مقسوم علیه یکی از سه نسبت یافت می شود یا تداخل یا
توافق یا تباین اما تداخل این است که تقسیم میکنیم مخلوطی درجهٔ
بزرکتر را بر مخلوطی از درجهٔ کوچکتر خارج قسمت بمقدار کاملی است
بی کسر که مساوی صفر است زیرا که مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر
بودند پس هرکاه این خارج قسمت یک تساوی مخلوطی از درجهٔ دویم
باشد عمل میکنیم و ریشهای او را معلوم میکنیم و بواسطهٔ این ریشها
ریشهای مقسوم و مقسوم علیه را نیز تعیین میکنیم و هرکاه خارج قسمت
از درجهٔ دویم نباشد پس بواسطهٔ او و مقسوم و مقسوم علیه یک تساوی
دیکر حاصل میکنیم و همچنین عمل میکنیم تا منتهی شود بمخلوطی از درجهٔ
دویم یا اول اما توافق این است که خارج قسمت بمقدار
صحیح کاملی نیست مشتمل بر صحیح و کسر است پس جستجو میکنیم وفق آنها را
یعنی مقسوم علیه مشترک میان این دو تساوی بعد تقسیم میکنیم مقسوم
و مقسوم علیه را بر این مقدار مشترک و این دو خارج قسمت نیز مساوی
صفرند پس اکر از درجهٔ اول یا دویم باشند که ریشهای آنها را معین
میکنیم و اکر از درجهٔ سیم یا بالاتر باشند نیز همین طریق عمل میکنیم تا
منتهی

منتهی شود بدرجه دوم یا اول اما تباین این است که نه خارج
قسمت کاملی حاصل شود و نه مقسوم علیه مشترک یافت شود پس در
این حالت بواسطه این دو تساوی نمیتوانیم تحویل حاصل نمائیم تا باید
نیز بطریق دیگر عمل کنیم تا یک تساوی دیگر حاصل شود و بواسطه
این تساویها عمل کنیم تا منتهی شود بدرجه اول یا دوم سبب
تداخل اینست که مخلوطی درجه بزرگتر حاوی است جمیع ریشهای
درجه کوچکتر را بعلاوه چند ریشه دیگر و سبب **توافق**
اینست که بعضی از ریشها مشترک هستند و بعضی مختص و سبب
تباین این است که هیچ ریشه یافت نمیشود که مشترک باشد
مابین این دو تساوی و نتیجه می بخشد که عدد جوابهای مسئله
مساوی است بحاصل جمع ریشهای آن دو تساوی و بجهة
توضیح این مطالب میگوئیم چونکه چند وجه از وجوه حل تساوی
مذکوره منتهی شده است به تساوی مخلوطی از درجه سیم و چند وجه نیز
بتساوی مخلوطی از درجه چهارم پس تقسیم میکنیم اخیر را که این است

$۲y^۴ - y^۳ - ۹y^۲ - y + ۲ = ۰$ بر اولی که این است

$۲y^۳ - ۳y^۲ - ۳y + ۲ = ۰$ بعد از تقسیم خارج قسمت $y + ۱$

میشود نتیجه $۲y^۴ - y^۳ - ۹y^۲ - y + ۲ : ۲y^۳ - ۳y^۲ - ۳y + ۲ = y + ۱$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $y + 1 = 0$ و نیز تقسیم میکنیم تساوی مخلوطی از
درجهٔ سیم را باین خارج قسمت بعد از تقسیم خارج قسمت $2y^2 - 5y + 2$
میشود یعنی $2y^3 - 2y^2 - 3y + 2 : y + 1 = 2y^2 - 5y + 2$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $2y^2 - 5y + 2 = 0$ پس تحویل نمودیم تساوی مخلوطی از
درجهٔ چهارم را بمخلوطی از درجهٔ دوم و همچنین یک تساوی منتهی شده بود
از درجهٔ پنجم پس تقسیم میکنیم او را بمخلوطی از درجهٔ چهارم خارج قسمت
$y + 1$ میشود یعنی $2y^5 + y^4 - 7y^3 - 7y^2 + y + 2 : 2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = y + 1$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی
صفر میشود یعنی $y + 1 = 0$ واین راجع شد بطریق اول پس تحویل نمودیم
نیز مخلوطی از درجهٔ پنجم را بدرجهٔ دوم و نیز یکوجه منتهی شده بود بمخلوطی از
درجهٔ ششم در اینجا بدو طریق میتوانیم تحویل کنیم اول آنکه تقسیم میکنیم اورا
بمخلوطی از درجهٔ سیم خارج قسمت $2y^3 + 3y^2 + 3y + 2$
میشود یعنی $4y^6 - 9y^4 + 10y^3 - 9y^2 + 4 :$

$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 2y^3 + 3y^2 + 3y + 2.$

وچونکه مقسوم و مقسوم علیه مساوی صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی

صفر بودند پس خارج قسمت نیز مساوی صفر میشود یعنی

$2y^3 + 3y^2 + 3y + 2 = 0$ بعد تقسیم میکنیم نیز همین تساوی مخلوطی

درجه ششم را بمخلوطی از درجه چهارم باینطریق $4y^6 - 9y^4 - 10y^3 -$

$9y^2 + 4 : 2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 2y^2 + y + 2$

وخارج قسمت نیز مساوی صفر است یعنی $2y^2 + y + 2 = 0$

حال تقسیم میکنیم خارج قسمت اول را باین خارج قسمت حاصل میشود

بعد از تقسیم $y + 1$ باین طریق

$2y^3 + 3y^2 + 3y + 2 : 2y^2 + y + 2 = y + 1$

واین خارج قسمت نیز مساوی صفر است پس عمل راجع شد بطریق اول

ثانی بعد از مجذور کردن مخلوطی درجه سیم این تساوی حاصل است

$4y^6 - 12y^5 - 3y^4 + 26y^3 - 3y^2 - 12y + 4 = 0$

حال تفریق میکنیم این تساوی را از تساوی اول باینطریق

$+4y^6 + 0 - 9y^4 - 10y^3 - 9y^2 + 0 + 4 = 0$

$\pm 4y^6 \mp 12y^5 \mp 3y^4 \pm 26y^3 \mp 3y^2 \mp 12y \pm 4 = 0$

$12y^5 - 6y^4 - 36y^3 - 6y^2 + 12y = 0$

$2y^4 - y^3 - 6y^2 - y + 2 = 0$

واین عمل منتهی شد بمخلوطی درجه چهارم و کیفیت تحلیل نمودن آن

بتفصیل ذکر شد سابقاً پس تحویل نمودیم یک مخلوطی از درجه ششم را بمخلوطی از درجه دویم و هو المطلوب و هم چنین هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی درجه پنجم را بدرجه سیم خارج قسمت $y^2+2y+1=0$ میشود یعنی

$$2y^5+y^4-2y^3-2y^2+y+2 : 2y^3-3y^2-y+2 = y^2+2y+1$$

و این خارج قسمت یکجذر حقیقی است از $y+1$ و باقی عمل مشابه مذکور شد و حالت توافق از تقریر این اعمال واضح است امتحانات ثابتین ظاهر خواهد شد در تمارین آتیه

از سؤالات دوره متوسطه امتحانات معارف ۱۳۰۶

$$xy+xy^2+xy^3=280.$$
$$x+xy^4+xy^5=980.$$

$$\frac{x+xy+xy^2+xy^3+xy^4+xy^5}{x-xy-xy^2-xy^3+xy^4+xy^5}=\frac{63}{35}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{1+y+y^2+y^3+y^4+y^5}{1-y-y^2-y^3+y^4+y^5}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{(y^2+y+1)(y^3+1)}{(y^2+y-1)(y^3-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{(y^2+y+1)(y^3+1)}{(y^2+y-1)(y^2+y+1)(y-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$\frac{y^3+1}{(y^2+y+1)(y-1)}=\frac{9}{5}.$$

$$9y^3-18y+9=5y^3+5$$
$$4y^3-18y+4=0$$
$$2y^3-9y+2=0$$
$$(2y^2+4y-1)(y-2)=2y^3-9y+2.$$
$$y=2$$
$$y^2+2y=\frac{1}{2}$$
$$y=-1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}.$$

$$xy + xy^2 + xy^3 = 280$$
$$x + xy^4 + xy^5 = 980$$

$$xy^5 + xy^4 + xy^3 = 280y^2$$
$$-xy^5 \pm xy^4 \pm x = -980$$

$$xy^3 - x = 280y^2 - 980$$

$$x(y^2 + y + 1)(y - 1) = 280y^2 - 980$$

$$xy(y^2 + y + 1) = 280$$

$$\frac{y-1}{y} = \frac{280y^2 - 980}{280}$$

$$280y - 280 = 280y^3 - 980y$$

$$2y^3 - 9y + 2 = 0$$

$$xy + xy^2 + xy^3 = 280$$
$$x + xy^4 + xy^5 = 980$$

$$\frac{x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5}{x - xy - xy^2 - xy^3 + xy^4 + xy^5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5}{1 - y - y - y^3 + y^4 + y^5} = \frac{9}{5}$$

$$5 + 5y + 5y^2 + 5y^3 + 5y^4 + 5y^5 =$$
$$= 9 - 9y - 9y^2 - 9y^3 + 9y^4 + 9y^5$$

$$2y^5 + 2y^4 - 7y^3 - 7y^2 - 7y + 2 = 0$$

هرگاه تقسیم کنیم مخلوطی درجه پنجم را بر مخلوطی درجه سیم بعد از تقسیم خارج
قسمت این ٠ = ١ + لا + لا^٢ میشود حال هرگاه در مخلوطی
درجه سیم و این خارج قسمت تامل کنیم معلوم میشود که نسبت با این دارند
زیرا که نه خارج قسمت کاملی و نه مقسوم علیه مشترکی یافت میشود پس بواسطه
این عدم تساوی جواب حاصل نمیشود باید باستعانت یک تساوی دیگر
تحویل کنیم و باید دانست که هر قدر در مسئله مجهولات زیادتر باشد که
تحصیل جواب بقواعد دیگر مشکل است مجال تصرف در این قاعده
بیشتر است و زودتر بجواب میتوان رسید و در هر مسئله که یک
مجهول زیاده نباشد این قاعده در ان جاری نمیشود زیرا که زیاده
از یک تصرف قبول نمیکند و لامحاله منتهی میشود بدرجه مخصوصی و
چونکه مقصود ما در این رساله بانجام رسید ختم آن بدعای بادشاه
دین پناه لازم نمود خلد الله ملکه واعز جنده وأفاض على البرية
برّه بقیت بقاء الدهر یا کهف اهله وهذا دعاء للبرية شامل
همیشه تا که بر افلاک انجمند پدید همیشه تا که بر ارواح قائمند اجسام
مباد جز بهوای تو گردش گردون
مباد جز برضای تو جنبش اجرام
آمین آمین
آمین